УДК 530.145 (075.8)

А. А. Юрова, В. А. Гриценко, Р. В. Чириков

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ИЗОТРОПНОМ, НЕОДНОРОДНОМ ДВУМЕРНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Изучены дискретные изоспектральные симметрии для двумерной линейной задачи – преобразования Дарбу (Мутара). В качестве приложения построены некоторые сингулярные и аналитические интегрируемые потенциалы (описывающие диэлектрическую проницаемость) для уравнений Максвелла в двумерной неоднородной среде.

We study discrete isospectral symmetries for the linear problem in spatial dimensions two, by developing a Darboux (Moutard) transformation formalism for this problem. As an application, we construct some singular and nonsingular integrable potentials (dielectric permitivity) for the Maxwell equations in a 2D inhomogeneous medium.

Ключевые слова: преобразование Дарбу-Мутара, изоспектральные симметрии, солитоны, электродинамика.

Key words: Darboux-Moutard transformations, isospectral symmetries, solitons, electrodynamics.

Интерес к изучению распространения электромагнитных волн в средах получил новый импульс в связи с обсуждением перспектив обработки информации с использованием оптических солитонов. Наличие солитонов обусловливается нелинейностью среды, что, к сожалению, весьма осложняет анализ решений соответствующих уравнений. В ряде случаев уравнения оказываются точно интегрируемыми (например, в моделях НУШ или sin-Гордон), но это скорее исключения, чем правило. В данной работе мы рассмотрим случай распространения электромагнитных волн в изотропном, но не однородном диэлектрике. Если среда неоднородна вдоль одного пространственного направления, то уравнения редуцируются в так называемую акустическую задачу. Нас будет интересовать более сложный случай наличия двумерной неоднородности. Как мы увидим, в этом случае уравнения Максвелла сводятся к эллиптическому линейному уравнению Лапласа с переменными коэффициентами. Мы покажем, что существует эффективный алгебраический способ построения точных решений этого уравнения.

Рассмотрим уравнения Максвелла в среде без внешнего воздействия, со стандартными обозначениями для электромагнитного поля E, H $D = \varepsilon E$, $B = kH$. Полагаем среду изотропной, но неоднородной с $k \equiv 1$ и $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$. Тогда

$$rotB = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \; rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \; divD = divB = 0 . \qquad (1)$$

Исключив *B*, получим уравнение, связывающее величины *E* и *D*:

$$rot \cdot rotE = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial\, t^2}\,. \qquad (2)$$

Для электрического поля положим $E = e^{iwt}\varphi$ с $\varphi = \varphi(x, y, z)$, откуда

$$\nabla\left(\frac{(\varphi,\nabla)\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \Delta\varphi = -\frac{w^2}{c^2}\varepsilon\varphi\,, \qquad (3)$$

где Δ — трехмерный Лапласиан.

Если $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $\varphi = (0,0,\varphi(x))$, $\lambda = -w^2/c^2$, $u^{-2}(x) = \varepsilon(x)$, то возникает уравнение для классической акустической задачи, исследованное в работе [1]. С другой стороны, можно подобрать такие $\varepsilon(x)$ и φ, что $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ и $\varphi = (0,0,\varphi(x, y))$. В этом случае (3) будет упрощено до линейного уравнения второго порядка

$$\Delta\varphi = \lambda\varepsilon\varphi\,, \qquad (4)$$

где Δ — двухмерный Лапласиан. Таким образом, линейное эллиптическое уравнение Лапласа описывает распространение электромагнитного поля в изотропной, но неоднородной в двух направлениях (x, y) среды.

Уравнение (4) допускает специальный тип симметрий — преобразования Мутара [2], которые в одномерном пределе сводятся к одномерным изоспектральным дискретным симметриям — преобразованиям Дарбу [3—5]. Ниже мы приведем основные формулы.

Предположим, $\varphi = \varphi(x, y)$ и $\varphi = \varphi(x, y)$ — два частных решения (4), т. е.

$$\Delta\varphi - \lambda\varepsilon\varphi = \Delta\varphi - \lambda\varepsilon\varphi = 0\,. \qquad (5)$$

В качестве опорного решения мы выберем функцию ϕ. Тогда однократное преобразование Мутара

$$\varphi \to \varphi^{(1)} = \frac{\theta[\varphi,\phi]}{\phi}\,,\ \varepsilon \to \varepsilon^{(1)} = \varepsilon - 2\lambda\Delta\ln\phi\,, \qquad (6)$$

где

$$\theta[\varphi,\phi] = \int_\Gamma dx_\mu \varepsilon_{\mu\nu}(\phi\partial_\nu\varphi - \varphi\partial_\nu\phi)\,. \qquad (7)$$

Выше были использованы следующие обозначения: $\mu \in \{1,2\}, x_\mu \in \{x, y\}$ — стандартный тензор, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu, \varepsilon_{\mu\nu}$ - полностью ассиметричный тензор с $\varepsilon_{12} = 1$, суммирование производится по повторяющимся индексам. Можно легко проверить прямой подстановкой (6), (7) в нижестоящую формулу (8), что «одетая» функция $\varphi^{(1)}$ удовлетворяет «одетому» уравнению (5) (с потенциалом $\varepsilon^{(1)}(x, y)$ и тем же значением спектрального параметра λ).

Простое вычисление дает выражения для одетых величин электрического и магнитного полей $E^{(1)}, B^{(1)}$:

$$E^{(1)} = e^{iwt}(o,o,\varphi^{(1)})\,,\ B^{(1)} = \frac{c}{w}e^{iwt}(-\varphi_y^{(1)}, \varphi_x^{(1)}, 0)\,,\ D^{(1)} = \varepsilon^{(1)}E^{(1)}\,. \qquad (8)$$

На основании выражения (8) можно построить множество точных решений уравнения Максвелла.

В качестве простого примера оценем $\varepsilon = 0$. Применяя предъявленные выше формулы, легко получить новую «среду» с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(1)}(x,y)$ и выражением для стационарных компонент поля $\varphi^{(1)}$:

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{8c^2}{w^2}\frac{a'(z)b'(\bar{z})}{(a(z)+b(\bar{z}))^2},$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{a(z)\beta(\bar{z}) - \alpha(z)b(\bar{z}) + \xi(z,\bar{z})}{a(z)+b(\bar{z})}, \tag{9}$$

где $\xi(z,\bar{z}) = \int dz(\alpha(z)a'(z) - a(z)\alpha'(z)) + \int d\bar{z}(\beta'(\bar{z})b(\bar{z}) - b'(\bar{z})\beta(\bar{z}))$,

$a(z), \alpha(z), b(\bar{z}), \beta(\bar{z})$ произвольные функции от $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$.

Отметим, что функция $\varphi^{(1)}$ из (6), (8) представляет собой общее решение одетого уравнения, что подчеркивается наличием двух произвольных функций $\alpha(z), \beta(\bar{z})$. Найденные величины соответствуют физической непоглощающей среде, если диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^{(1)}$ суть вещественная функция. Это накладывает дополнительные ограничения на величины $a(z)$ и $b(\bar{z})$, а именно $b(\bar{z}) = \overline{a(z)}$. В общем же случае функции $\varepsilon^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$ будут обладать сингулярностями вдоль определенных кривых в плоскости (x, y).

Интересно отметить, что безотражательные потенциалы для одномерной задачи обладают точками сингулярности на вещественной оси линии. Очевидно, что их двумерные аналоги, такие как (9) для уравнения (5), обладают куда более разнообразной структурой сингулярностей в вещественной плоскости. С другой стороны, исключив требование, чтобы величина $\varepsilon^{(1)}$ была вещественной, получим поглощающую среду, которая может быть достаточно интересна для физических приложений.

В заключение исследуем одевающую цепочку, сформированную преобразованием Мутара (6). Простое периодическое закрывание одевающей цепочки в результате дает обычную диэлектрическую проницаемость, схожую с одномерным случаем, указанным выше.

Отметим $f_n = \ln\phi, f_{n+1} = \ln\varphi^{(1)}$. Затем после простых вычислений получим

$$\Delta(f_n + f_{n+1}) = \|\nabla f_n\|^2 - \|\nabla f_{n+1}\|^2, \tag{10}$$

где значком $\|...\|$ обозначена норма.

Цепочка (10) близко связана с цепочкой Веселова и Шабата [6] для уравнения Шрёдингера. Выберем f_n так, что

$$f_n = \sqrt{\lambda_n}\,y + \int dx g_n(x),$$

и подставим это значение в (10) (λ_n в данном случае константа). Получим следующее выражение для величины $g_n(x)$:

$$(g_n + g_{n+1})' = g_n^2 - g_{n+1}^2 + \lambda_n - \lambda_{n+1},$$

совпадающее с соответствующей формулой из работы [6].

Простейшее периодическое замыкание одевающей цепочки (10) имеет вид $f_{n+1} = f_n = F(x, y)$. Отсюда следует, что функция F является гармонической и диэлектрическая проницаемость в соответствующей среде определяется выражением

$$\varepsilon(x, y) = \frac{c^2}{w^2}(F_x^2 + F_y^2).$$

Таким образом, формализм Дарбу — Мутара оказывается весьма эффективным методом построения точных решений уравнений, описывающих электромагнитные поля в изотропном, неоднородном диэлектрике.

Список литературы

1. *Yurova A.A., Yurov A.V., Rudnev M.* Darboux transformation for classical acoustic spectral problem // Interntional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2003. № 49. P. 3123—3142.

2. *Moutard Th.* Sur la construction des equations de la forme $\frac{1}{z}\frac{d^2 z}{dxdy} = \lambda(x, y)$, qui admettent une integrale generale explicite // J. Ecole Polytechnique. 1878. № 45. P. 1—11.

3. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformation and Solitons. B.; Heidelberg, 1991.

4. *Darboux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. P., 1915. Vol. 2.

5. *Crum M.M.* Associated Sturm-Liouville systems // Quart. J. Math. 1955. Ser. 2, vol. 6. P. 121—127.

6. *Veselov A.P., Shabat A.B.* Dressing Chains and Spectral Theory of the Schrödinger Operator // Funkts. Anal. Prilozh. 1993. Vol. 27, Issue 2. P. 1—2.1.

Об авторах

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: yurov@freemail.ru

Владимир Алексеевич Гриценко — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: VGritsenko@kantiana.ru

Роман Викторович Чириков— магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: tdrifter@yandex.ru

About authors

Alla Yurova — PhD, associate professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: yurov@freemail.ru

Vladimir Gritsenko — Dr, professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: VGritsenko@kantiana.ru

Roman Chirikov — student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: tdrifter@yandex.ru